Aufgabe 2: Analysis

Ein digitales Messgerät misst bei einem Diabetes-Patienten kontinuierlich den Glukosewert (Blutzuckerwert). Der Glukosewert dieses Patienten wird in Abhängigkeit von der Zeit t im Intervall $[\,0\,;\,3{,}75\,]$ mit Hilfe der Funktion g mit

$$g(t) = 13 \cdot t^3 - 78 \cdot t^2 + 104 \cdot t + 96$$

modelliert. Dabei wird der Glukosewert $g(t)$ in u (Units) und die Zeit t in h (Stunden) seit Messbeginn angegeben. Die Abbildung 1 auf dem Beiblatt zeigt den Graphen von g im betrachteten Intervall.

a) a1) Bei einem Glukosewert von unter $70\,\mathrm{u}$ spricht man von Unterzuckerung. Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen die Länge des Zeitraums, in dem Unterzuckerung vorliegt. (2 P)

a2) Etwas mehr als drei Stunden nach Messbeginn liegt im Bereich der Unterzuckerung der niedrigste Glukosewert. Berechnen Sie den zugehörigen Zeitpunkt. (3 P)

a3) Weisen Sie nach, dass der Glukosewert eine Stunde nach Messbeginn um mehr als 40% größer ist als zu Beginn der Messung. (3 P)

a4) Berechnen Sie den durchschnittlichen Glukosewert innerhalb der ersten zwei Stunden nach Messbeginn. (3 P)

b) Aus medizinischer Sicht ist ein zu schnelles Absinken des Glukosewerts gefährlich.

b1) $T(2 \mid -52)$ ist der tiefste Punkt des Graphen der Ableitungsfunktion g' über dem Intervall $[\,0\,;\,3{,}75\,]$.
Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang. (3 P)

b2) Die folgenden Terme beschreiben unterschiedliche Änderungsraten der Funktion g.

Term A: $\dfrac{g(3) - g(1)}{3 - 1}$

Term B: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(1+h) - g(1)}{h}$

Geben Sie an, welche Änderungsraten diese beiden Terme beschreiben. (4 P)

b3) Liegt die momentane Änderungsrate unter einem Wert von $-40\,\mathrm{u/h}$, so zeigt das Messgerät des Patienten ein Warnsymbol an.
Weisen Sie nach, dass dieses Warnsymbol im betrachteten Zeitintervall mehr als eine Stunde lang angezeigt wird. (4 P)

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit

$f_a(t) = a \cdot \left(t^3 - 4 \cdot t\right)$ und $a > 0$.

Die Abbildung 2 auf dem Beiblatt zeigt den Graphen von f_1.

c) c1) Für jedes $a > 0$ hat der Graph von f_a genau einen Hochpunkt H_a.
Beschreiben Sie, wie sich die Lage von H_a ändert, wenn sich der Wert des Parameters a verdreifacht. (3 P)

c2) Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(2\,|\,0)$ schließt mit der t-Achse einen Winkel ein.
Bestimmen Sie denjenigen Wert für a, für den dieser Winkel $45°$ beträgt. (3 P)

c3) Weisen Sie durch Rechnung nach:
Verschiebt man den Graphen von g nach links entlang der t-Achse um 2 Einheiten und anschließend entlang der y-Achse nach unten um 96 Einheiten, so erhält man einen Graphen, der zur Schar f_a gehört. (5 P)

d) Gegeben ist die Funktionenschar h_a mit $h_a(t) = -a \cdot t$ und $a > 0$.
Betrachtet wird der folgende Term:

$$\left|\int_1^{t_0} f_a(t)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_1^{t_0} h_a(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Dabei ist t_0 diejenige Lösung der Gleichung $f_a(t) = h_a(t)$, für die $1 < t_0 < 2$ gilt.

d1) Zeichnen Sie in Abbildung 2 ein Flächenstück ein, dessen Inhalt mit dem angegebenen Term für $a = 1$ berechnet werden kann. (2 P)

d2) Berechnen Sie t_0 sowie den Wert des obigen Terms in Abhängigkeit von a. (5 P)

Beiblatt

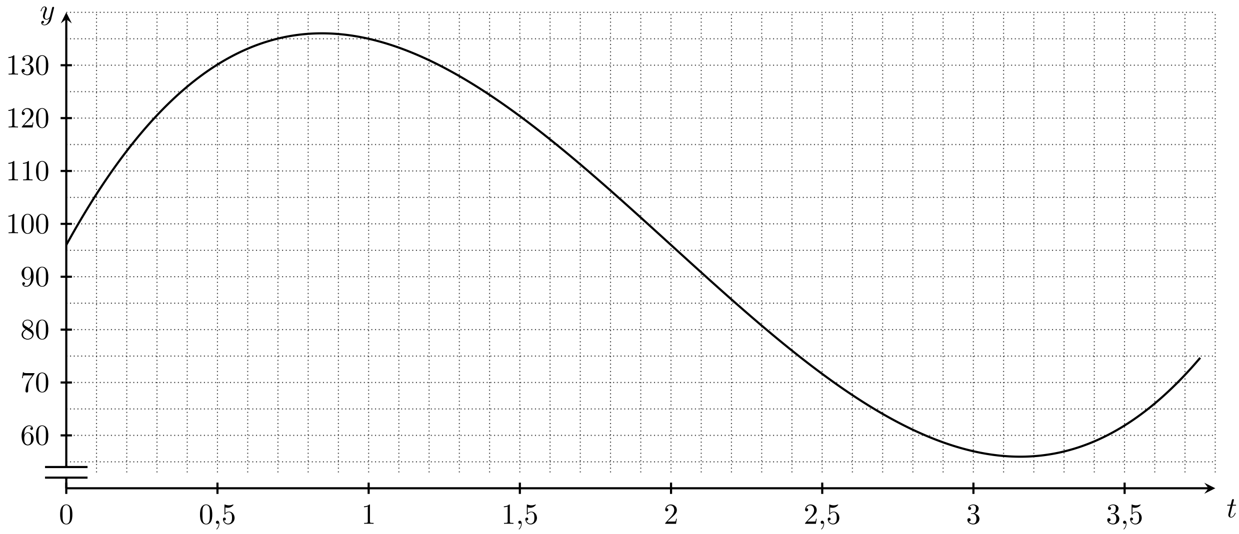

Abbildung 1: der Graph von g im betrachteten Zeitintervall $[0\,;\,3{,}75]$

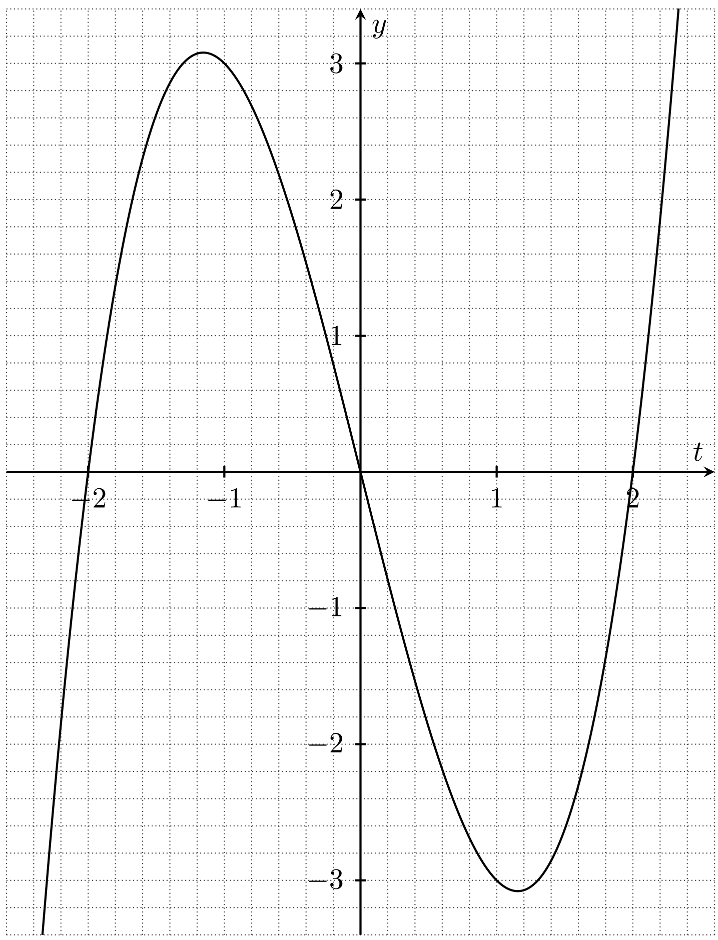

Abbildung 2: der Graph von f_1