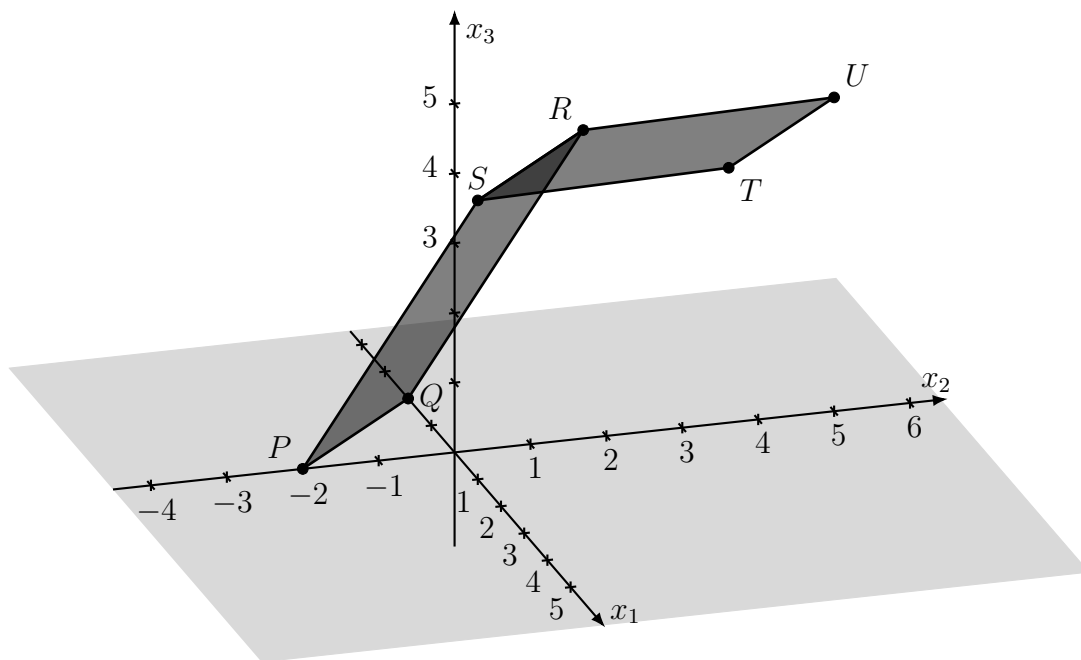


Kernfach Mathematik

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Ein Sportler trainiert in einer Kletterhalle. Die Situation wird in einem geeigneten Koordinatensystem modelliert, wobei eine Längeneinheit einem Meter in der Realität entspricht. Die x_1x_2 -Ebene stellt den Hallenboden dar. Der Kletterer steht zunächst auf dem Startpunkt $(0|0|0)$. Er klettert an der Wand $PQRS$ hoch, greift von dort auf die Wand $RSTU$ über und hangelt sich an ihr nach vorne bis zur Kante \overline{TU} .



Die ebenen Vierecke $PQRS$ und $RSTU$ haben die Eckpunkte $P(0|-2|0)$, $Q(-2|0|0)$, $R(-1|2|4)$, $S(1|0|4)$, $T(2|3|4,5)$ und $U(0|5|4,5)$. Das Viereck $PQRS$ liegt in der Ebene E .

- a) a1) Berechnen Sie die Länge der Kante \overline{PQ} . (2 P)
- a2) Zeigen Sie, dass das Viereck $PQRS$ ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist. (5 P)
- a3) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform. (4 P)
- [Kontrolle: $E: 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -8$]
- a4) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Ebene E mit der x_3 -Achse und geben Sie die Höhe der Wand senkrecht über dem Startpunkt an. (4 P)
- a5) Untersuchen Sie, ob es in der Ebene E einen Punkt $(x_1|x_2|2)$ mit ganzzahligen Koordinaten x_1 und x_2 gibt. (3 P)

Kernfach Mathematik

- b) In der Nähe der Kante \overline{TU} hängt bei $G(3|3,5|4,5)$ eine Glocke, die mit einer Leine am Hallendach befestigt ist. Zum Abschluss seiner Trainingseinheit läutet der Kletterer diese Glocke mit der einen Hand, während er sich mit der anderen Hand an demjenigen Punkt K auf der Kante \overline{TU} festhält, der den geringsten Abstand zu G hat.

Durch T und U verläuft die Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OT} + r \cdot \overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- b1) Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lotes von G auf g . (5 P)
[Kontrolle: $F(2,25|2,75|4,5)$]
- b2) Begründen Sie, dass K und F nicht identisch sind. (2 P)
- b3) Künftig soll die Glocke an einem anderen Punkt G^* platziert werden. Der Punkt G^* befindet sich in einer Höhe von 4,5 m und ist gleich weit von T und U entfernt; sein Abstand vom Mittelpunkt M der Kante \overline{TU} beträgt 35 cm.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes M und die Koordinaten eines Punktes G^* mit den beschriebenen Eigenschaften. (5 P)
- c) Im Rahmen einer Renovierung wird darüber nachgedacht, den Winkel zwischen den beiden Wänden zu verändern. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist durch $E_a: x_1 + x_2 - ax_3 = 1 - 4a$ eine Ebene E_a gegeben. Jede dieser Ebenen enthält die Gerade durch R und S .
- c1) Es gibt genau eine Zahl a mit $E_a = E$. Bestimmen Sie diese Zahl. (3 P)
- c2) E_8 ist diejenige Ebene, in der das Viereck $RSTU$ liegt. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebenen E und E_8 . (3 P)
- c3) Bestimmen Sie alle Zahlen a , so dass sich E und E_a unter einem 60° -Winkel schneiden. (4 P)