

# Analysis

## Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die in  $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$  definierte Funktion  $f : x \mapsto \frac{6x}{x^2 - 4}$ . Der Graph von  $f$  wird mit  $G_f$  bezeichnet und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

3 a) Geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten von  $G_f$  an. Begründen Sie, dass  $G_f$  die  $x$ -Achse als waagrechte Asymptote besitzt.

5 b) Bestimmen Sie das jeweilige Monotonieverhalten von  $f$  in den drei Teilintervallen  $]-\infty; -2[$ ,  $]-2; 2[$  und  $]2; +\infty[$  der Definitionsmenge. Berechnen Sie zudem die Steigung der Tangente an  $G_f$  im Punkt  $(0 | f(0))$ .

$$(zur Kontrolle: f'(x) = -\frac{6 \cdot (x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2})$$

Die Punkte  $A(3 | 3,6)$  und  $B(8 | 0,8)$  liegen auf  $G_f$ ; zwischen diesen beiden Punkten verläuft  $G_f$  unterhalb der Strecke  $[AB]$ .

4 c) Skizzieren Sie  $G_f$  im Bereich  $-10 \leq x \leq 10$  unter Verwendung der bisherigen Informationen in einem Koordinatensystem.

5 d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von  $G_f$  und der Strecke  $[AB]$  eingeschlossen wird.

2 Betrachtet wird die Schar der Funktionen  $f_{a,b,c} : x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+c}$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und maximaler Definitionsmenge  $D_{a,b,c}$ .

1 a) Die Funktion  $f$  aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar. Geben Sie die zugehörigen Werte von  $a$ ,  $b$  und  $c$  an.

2 b) Begründen Sie: Wenn  $a = 0$  und  $b \neq 0$  gilt, dann ist der Graph von  $f_{a,b,c}$  symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse und schneidet die  $x$ -Achse nicht.

3 c) Geben Sie für  $a$ ,  $b$  und  $c$  alle Werte an, sodass sowohl  $D_{a,b,c} = \mathbb{R}$  gilt als auch, dass der Graph von  $f_{a,b,c}$  symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, aber nicht identisch mit der  $x$ -Achse ist.

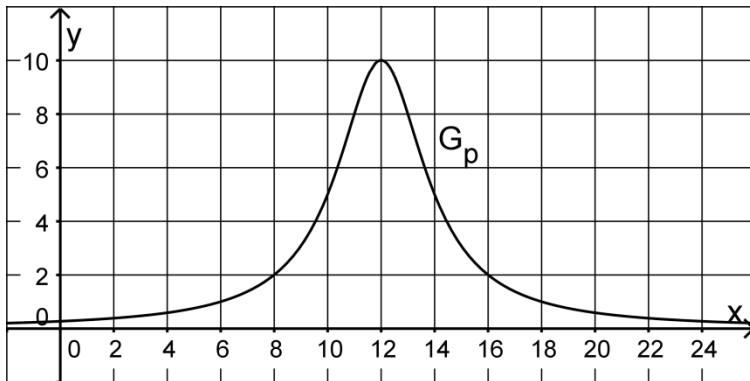
4 d) Für die erste Ableitung von  $f_{a,b,c}$  gilt:  $f'_{a,b,c}(x) = -\frac{ax^2 + 2bx - ac}{(x^2 + c)^2}$ .

Zeigen Sie: Wenn  $a \neq 0$  und  $c > 0$  gilt, dann besitzt der Graph von  $f_{a,b,c}$  genau zwei Extrempunkte.

*(Fortsetzung nächste Seite)*

3 Betrachtet wird die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $p : x \mapsto \frac{40}{(x-12)^2 + 4}$ ;

die Abbildung zeigt den Graphen  $G_p$  von  $p$ .



4 a) Beschreiben Sie, wie  $G_p$  aus dem Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion

$$h : x \mapsto \frac{5}{x^2 + 4}$$

schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass  $G_p$  bezüglich der Gerade mit der Gleichung  $x = 12$  symmetrisch ist.

Eine auf einem Hausdach installierte Photovoltaikanlage wandelt Lichtenergie in elektrische Energie um. Für  $4 \leq x \leq 20$  beschreibt die Funktion  $p$  modellhaft die zeitliche Entwicklung der Leistung der Anlage an einem bestimmten Tag. Dabei ist  $x$  die seit Mitternacht vergangene Zeit in Stunden und  $p(x)$  die Leistung in kW (Kilowatt).

4 b) Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit am Nachmittag auf Minuten genau, ab der die Leistung der Anlage weniger als 40 % ihres Tageshöchstwerts von 10 kW beträgt.

2 c) Die Funktion  $p$  besitzt im Intervall  $[4; 12]$  eine Wendestelle. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang an.

3 d) Die von der Anlage produzierte elektrische Energie wird vollständig in das Stromnetz eingespeist. Der Hauseigentümer erhält für die eingespeiste elektrische Energie eine Vergütung von 10 Cent pro Kilowattstunde (kWh).

Die in  $[4; 20]$  definierte Funktion  $x \mapsto E(x)$  gibt die elektrische Energie in kWh an, die die Anlage am betrachteten Tag von 4:00 Uhr bis  $x$  Stunden nach Mitternacht in das Stromnetz einspeist.

$$\text{Es gilt } E'(x) = p(x) \text{ für } x \in [4; 20].$$

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Vergütung, die der Hauseigentümer für die von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr in das Stromnetz eingespeiste elektrische Energie erhält.