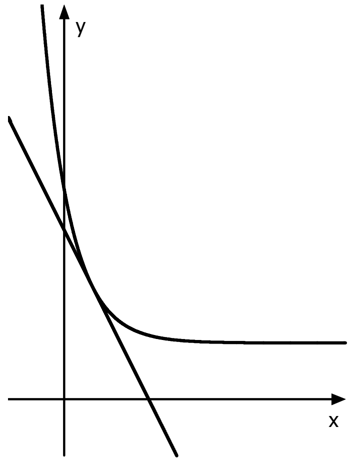
Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-2x+1} + 1$.
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f sowie die Tangente an G_f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$.

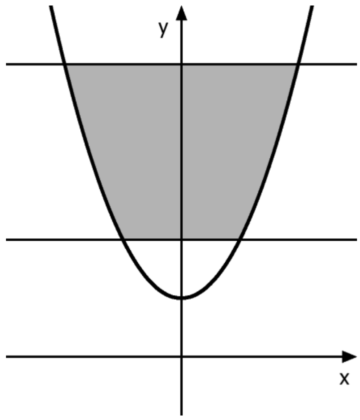


a) Weisen Sie nach, dass diese Tangente die Steigung -2 hat. (1 VP)

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt. (1,5 VP)

Aufgabe 2

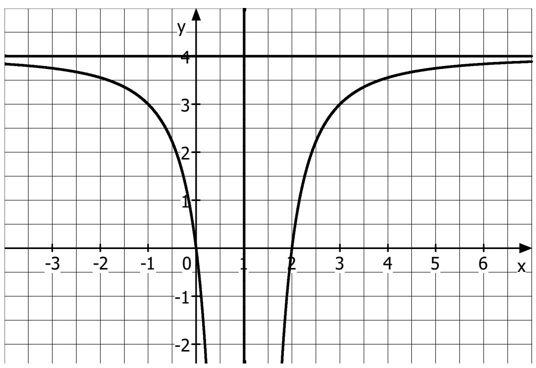
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 1 + x^2$ sowie die Geraden g: $y = 2$ und h: $y = 5$.
Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche. (2,5 VP)



Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$f(x) = a + \frac{b}{x^2 + c}$ und $g(x) = a + \frac{b}{(x+c)^2}$. Die Abbildung zeigt den Graphen einer der beiden Funktionen sowie seine Asymptoten.

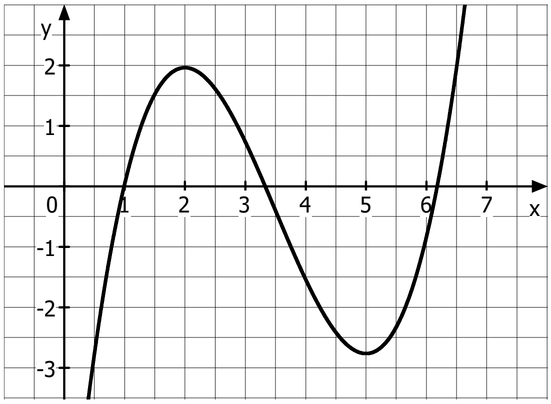


a) Begründen Sie, dass es sich bei dem abgebildeten Graphen nicht um den Graphen von f handeln kann. (1 VP)

b) Bestimmen Sie für die Funktion g die Werte von a, b und c. (1,5 VP)

Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.
Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = f(x) + 5x$.
Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



(1) Jede Stammfunktion von f besitzt im Intervall $[0{,}5\,;\,4]$ genau ein lokales Minimum. (1 VP)

(2) Die Funktion g ist im Intervall $[1\,;\,6]$ streng monoton steigend. (1,5 VP)

Aufgabe 5

Gegeben sind die Ebenen E und F sowie die Ebenenschar G_r ($r \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} E:&\quad x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 6 \\ F:&\quad 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ G_r:&\quad 9x_2 + 3x_3 = r + 11 \end{aligned}$$

a) Stellen Sie die Ebene G_7 in einem Koordinatensystem dar. (1 VP)

b) Für einen Wert von r besitzen E, F und G_r eine gemeinsame Schnittgerade. Bestimmen Sie diesen Wert von r. (1,5 VP)

Aufgabe 6

Gegeben sind der Punkt $P(-1\,|\,1\,|\,-1)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Der Punkt $Q(3\,|\,3\,|\,3)$ liegt auf der Geraden g.

a) Zeigen Sie, dass Q derjenige Punkt auf g ist, der zu P den kleinsten Abstand hat. (1 VP)

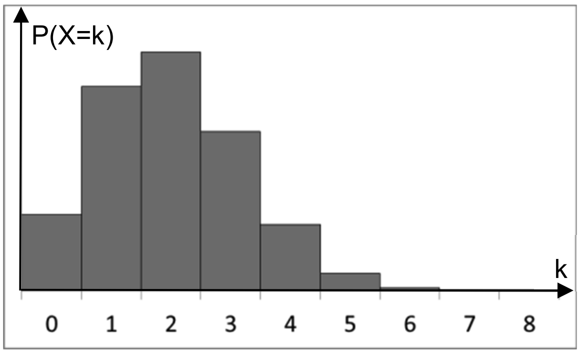
b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts R auf der Geraden g, für den das Dreieck PQR den Flächeninhalt 27 hat. (1,5 VP)

Aufgabe 7

In einer Urne befinden sich vier schwarze und eine unbekannte Anzahl weißer Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei zwei schwarze Kugeln zu ziehen, ist doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe zu ziehen.
Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Kugeln in der Urne. (2,5 VP)

Aufgabe 8

a) Die Abbildung stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X dar.



Begründen Sie, dass $P(X = 2) < 0,5$ gilt. (1 VP)

b) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 8$ und $0 < p < 1$ gilt $P(Y = 1) = 2 \cdot P(Y = 0)$.
Berechnen Sie den Wert von p. (1,5 VP)