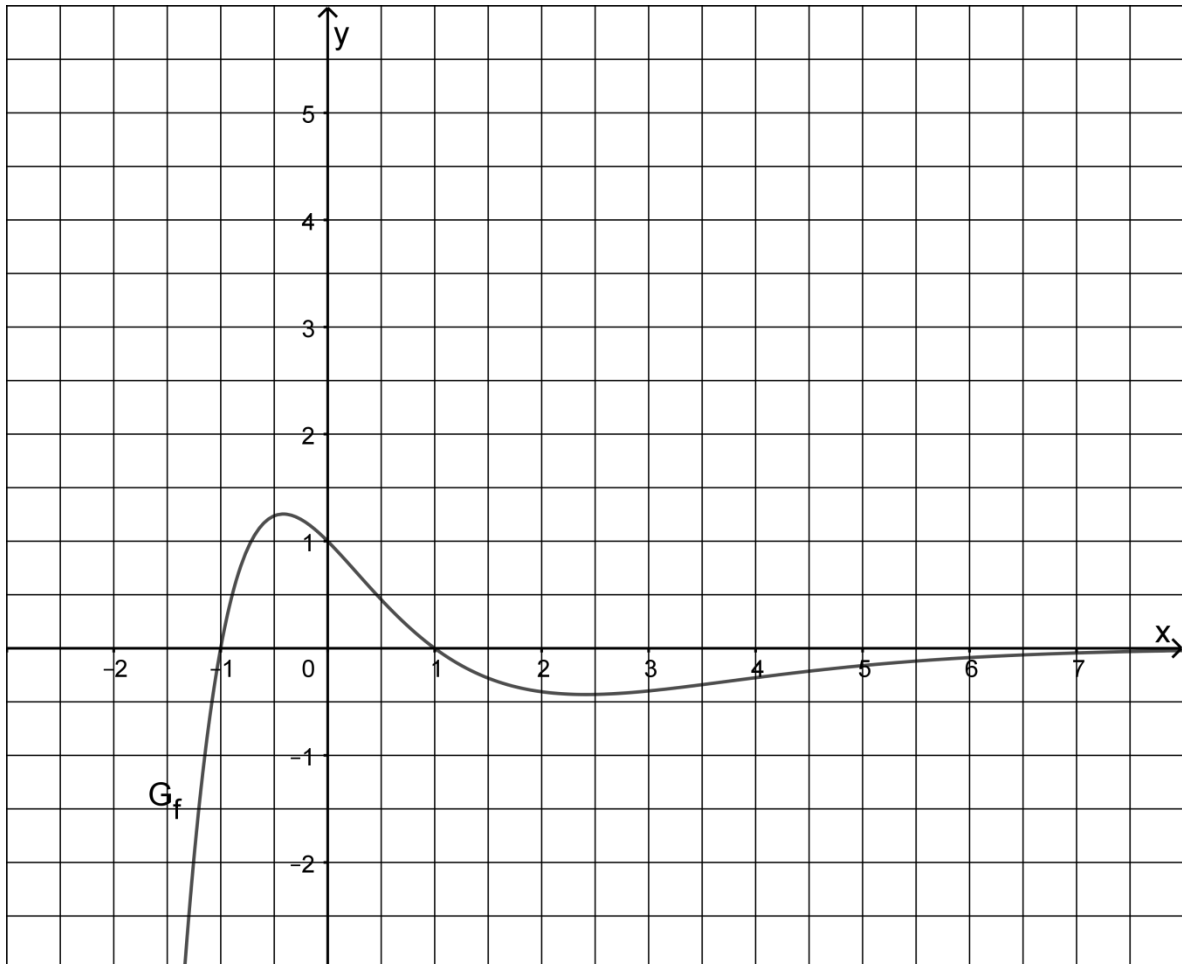


Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

- 1 Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f : x \mapsto (1 - x^2) \cdot e^{-x}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f .



- 2 a) Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt.
- 4 b) Bestimmen Sie rechnerisch die x -Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_f .
- (zur Kontrolle: $f'(x) = (x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x}$)*
- 4 c) Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\int_{-1}^4 f(x) dx$.

(Fortsetzung nächste Seite)

Die in \mathbb{R} definierte Funktion F ist diejenige Stammfunktion von f , deren Graph durch den Punkt $T(-1|2)$ verläuft.

- 2 **d)** Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass der Graph von F im Punkt T einen Tiefpunkt besitzt.
- 3 **e)** Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von F . Berücksichtigen Sie dabei insbesondere, dass $F(1) \approx 3,5$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2$ gilt.
- 2 **f)** Deuten Sie die Aussage $F(2,5) - F(0) \approx 0$ in Bezug auf G_f geometrisch.

Betrachtet wird nun die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen $h_k : x \mapsto (1 - kx^2) \cdot e^{-x}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von h_k wird mit G_k bezeichnet. Für $k = 1$ ergibt sich die bisher betrachtete Funktion f .

- 2 **g)** Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von h_k an.
- 3 **h)** Für einen bestimmten Wert von k besitzt G_k zwei Schnittpunkte mit der x -Achse, die voneinander den Abstand 4 haben. Berechnen Sie diesen Wert.
- 2 **i)** Beurteilen Sie, ob es einen Wert von k gibt, sodass G_k und G_f bezüglich der x -Achse symmetrisch zueinander liegen.

2 Betrachtet wird die in \mathbb{R} definierte Funktion $g : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

- 5 **a)** Zeigen Sie, dass g streng monoton zunehmend ist und die Wertemenge $]0;1[$ besitzt.

$$(zur\ Kontrolle: g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2})$$

- 3 **b)** Geben Sie $g'(0)$ an und zeichnen Sie G_g im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse und der Tatsache, dass G_g in $W(0|g(0))$ seinen einzigen Wendepunkt hat, in ein Koordinatensystem ein.
- 2 **c)** Der Graph der Funktion g^* geht aus G_g durch Strecken und Verschieben hervor. Die Wertemenge von g^* ist $] -1;1[$. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für g^* an.
- 6 **d)** Es wird das Flächenstück zwischen G_g und der x -Achse im Bereich $-\ln 3 \leq x \leq b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ betrachtet. Bestimmen Sie den Wert von b so, dass die y -Achse dieses Flächenstück halbiert.