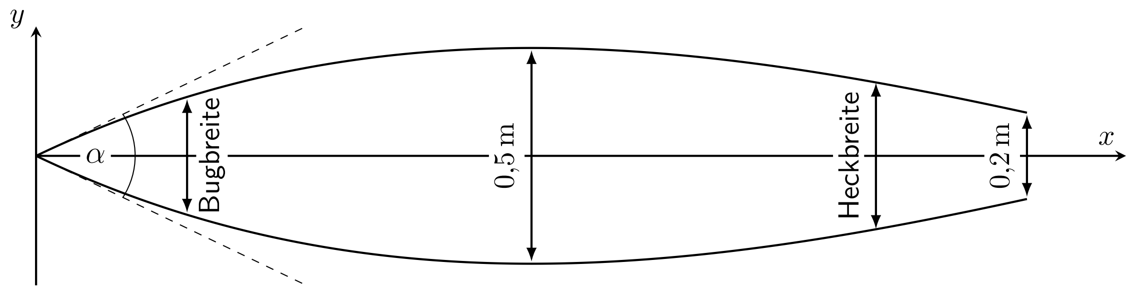
Aufgabe 2: Analysis-CAS

Surfbretter können am Computer konstruiert und dann automatisch aus einem Styroporblock gefräst werden. Die folgende Abbildung zeigt die Draufsicht eines Surfbretts, das bezüglich der eingezeichneten x-Achse achsensymmetrisch ist.



Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) Eine Surferin wünscht sich ein wie in der Zeichnung dargestelltes Shortboard der Länge $2\,\mathrm{m}$. Die größte Breite von $0{,}5\,\mathrm{m}$ wird genau in der Mitte zwischen Bugspitze und dem Ende des Hecks erreicht. Am Ende des Hecks hat das Surfbrett eine Breite von $0{,}2\,\mathrm{m}$. Der in Fahrtrichtung gesehen rechte Rand des Surfbretts (in der Abbildung der obere Teil) soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades modelliert werden.

a1) Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f. (4 P)

[*Kontrolle:* $f(x) = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}35 \cdot x^2 + 0{,}55 \cdot x$]

a2) Zum Vergleich verschiedener Surfbrett-Designs wird oft neben der größten Breite des Surfbretts die Breite des Bretts jeweils $1\,\mathrm{Fuß}$ ($30{,}48\,\mathrm{cm}$) von der Spitze des Bugs und vom Ende des Hecks entfernt gemessen (siehe obige Abbildung).
Berechnen Sie die Bugbreite und die Heckbreite für das vorgegebene Modell. (3 P)

a3) Es gibt zwei Stellen, an denen das Surfbrett eine Breite von $40\,\mathrm{cm}$ aufweist.
Ermitteln Sie den Abstand dieser beiden Stellen voneinander. (3 P)

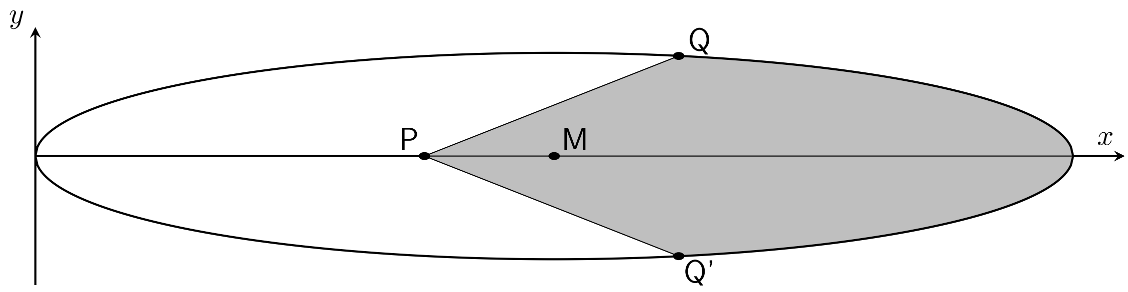
a4) Berechnen Sie den Öffnungswinkel α an der Spitze des Surfbrettes. (3 P)

a5) Nehmen Sie vereinfachend an, dass das Surfbrett eben ist und eine einheitliche Dicke von $5\,\mathrm{cm}$ hat.
Berechnen Sie das Volumen des Surfbretts und geben Sie dieses Volumen in Litern an. (4 P)

b) Neben dem im Aufgabenteil a) untersuchten Shortboard gibt es noch viele andere Bauformen von Surfbrettern. Der in Fahrtrichtung gesehen rechte Rand (in der folgenden Abbildung der obere Teil) eines Funboards wird vollständig durch den Graphen der Funktion g mit

$$g(x) = 0{,}3 \cdot \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

zwischen den beiden Nullstellen von g beschrieben.



b1) Zeigen Sie, dass das Funboard eine Länge von $2{,}0\,\mathrm{m}$ hat. (2 P)

b2) Geben Sie das Verhalten von $g'(x)$ für $x \to 2$ an und interpretieren Sie dieses Verhalten im Sachzusammenhang. (3 P)

b3) Ein Funboard gleicher Bauart soll - wie in der Abbildung dargestellt - teilweise farbig lackiert werden. Dabei soll der Punkt $P\,(0{,}75\,|\,0)$ geradlinig mit den beiden zur x-Achse symmetrisch angeordneten Punkten $Q\,(b\,|\,g(b))$ bzw. Q' verbunden sein. Q ist so zu platzieren, dass der Flächeninhalt des gefärbten Teils der Hälfte der Gesamtfläche entspricht. Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Situation in Abhängigkeit von b beschreibt und bestimmen Sie die Koordinaten von Q. (5 P)

c) Für jedes $k > 0$ wird durch $g_k(x) = 0{,}15 \cdot k \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{k} \cdot x - 1\right)^2}$ mit $x \in [0; k]$ eine Funktion g_k gegeben. Für geeignete k beschreibt der Graph von g_k erneut den in Fahrtrichtung gesehen rechten Rand eines Funboards.

c1) Es gibt ein $k > 0$, für das $g_k = g$ gilt (mit g aus Teilaufgabe b)). Geben Sie den entsprechenden Wert für k an. (1 P)

c2) Der Graph von g_k ist an jeder Stelle x mit $0 < x < k$ rechtsgekrümmt.
Zeigen Sie, dass die größte Breite für das durch g_k modellierte Funboard an der Stelle $x = \frac{k}{2}$ angenommen wird. (3 P)

c3) Ein Surfer wünscht sich ein durch g_k modelliertes Funboard, das eine Länge von $2{,}5$ Metern aufweist. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von k und ermitteln Sie die größte Breite dieses Funboards. (4 P)

c4) Je größer das Verhältnis von größter Breite zur Länge ist, desto stabiler verhält sich ein Surfbrett im Wasser. Weisen Sie nach, dass sich alle durch g_k modellierten Funboards stabiler im Wasser verhalten als das Shortboard aus Aufgabenteil a). (5 P)